Cayley Γραφήματα - Μια εισαγωγή

28-10-2005

1 Εισαγωγή

Συνεχίζοντας το επιτυχημένο, συμποσιακού χαρακτήρα, κύκλο των σεμιναρίων υπό τον γενικό τίτλο 42 θα μιλήσουμε σήμερα για τα γραφήματα Cayley ή αλλιώς για τα διαγράμματα Cayley. Ο Arthur Cayley (1821! - 1895) περί το έτος 1878 παρουσιάσε αυτό που ο ίδιος ονόμασε εκείνη την εποχή colour group ή group diagramm.

Ο ορισμός του Cayley γραφήματος δεν είναι και τόσο διασκεδαστικός. Τα όμορφα σχήματα όμως που έδωσε εξαρχής και οι πλειάδα των αποτελεσμάτων που ακολούθησαν ανάγκασαν την τότε και τώρα μαθηματική κοινότητα να υποκλιθεί στην απλότητα και την χρησιμότητα της σύλληψης του Cayley.

Κάθε μαθηματικός που ... έξυσε μια φορά ένα βιβλίο άλγεβρας πρέπει να είναι ενήμερος για την ύπαρξη ενός μπελά που λέγεται ομάδα! Όσοι άντεξαν έχουν δεί οτι μία ομάδα μπορεί να παρασταθεί με διάφορους τρόπους! Ένας από αυτούς ιδίως στις μικρής τάξης πεπερασμένες ομάδες είναι ο πίνακας πολλαπλασιασμού του ... Cayley (ναι πάλι αυτος !) αλλά είναι λίγο δύσχρηστος σε μεγάλες ομάδες και δεν εφαρμόζεται σε άπειρες ομάδες.

Πέραν αυτού υπάρχει ο περιγραφικός τρόπος μιας ομάδας που όμως δεν είναι σίγουρος, γιατί πως να το κάνουμε , μερικές φορες το νόημα χαλάει στις μεταφράσεις από γλώσσα σε γλώσσα.

Ο πιό διαδεδομένος και κοινά αποδεκτός ορισμός των ομάδων είναι με την βοήθεια μιας παράστασης. Ας εξηγηθούμε για να μην παρεξηγηθούμε. Η παράσταση έχει δύο σκέλη $G =< S|R >$. Το S ονομάζεται σύνολο γεννητόρων της G και το R σύνολο σχέσεων. Το S λοιπόν αποτελείτε από στοιχεία της ομάδας έτσι ώστε όλα τα στοιχεία της G να γράφονται ως γινόμενα των στοιχείων του S αν αυτά υψωθούν σε κάποια δύναμη.

Επιτρέπουμε και αρνητικές δυνάμεις που συμβολίζουν τα αντίστροφα των s στο S σε κάποια δύναμη. Το R από την άλλη είναι ένα σύνολο σχέσεων δηλαδή λέξεων με γράμματα από το σύνολο γεννητόρων που συμβολίζουν μια σχέση που διέπει (!?!) την ομάδα. (Λέξεις , γράμματα , διέπει , ορθογραφία και γραμματική κάνουμε?).

Ας δώσουμε λοιπόν ένα τέτοιο παράδειγμα. Η ομάδα του Klein δεν είναι άλλη από την αβελιανή ομάδα με τέσσερα στοιχεία που, εκτός του ταυτοτικού, έχουν τάξη 2 και το γινόμενο των δύο δίνει το τρίτο (περιγραφικός τρόπος!). Δηλαδή $G = \{e, a, b, ab\}$. Η παράσταση που τις αντιστοιχεί είναι $G =< a, b|a^2 = b^2 = e, ab = ba >$.

Όμοια $\mathbb{Z} =< a >$ και $F_2 =< a, b >$ η ελεύθερη ομάδα τάξης δύο. Οι δύο τελευταίες δεν έχουν καθόλου σχέσεις. Αυτός ο ορισμός ειναι και ο απλούστερος για τις ελεύθερες ομάδες. Ελεύθερες δηλαδή είναι οι ομάδες που η απλούστερη παράσταση τους δεν έχει σχέσεις.

Ακόμα $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} =< a, b|ab = ba >$ και $\mathbb{Z}_n =< a|a^n = e >$. Πολύ εύκολα παριστάνουμε και την $D_n =< s, a|s^n = a^2 = e, asa = s^{n-1} >$ (διεδρική ομάδα!).

Παρακάτω θα περιοριστούμε σε πεπερασμένα παριστώμενες ομάδες δηλαδή σε ομάδες που η παράσταση τους έχει πεεπρασμένους γεννήτορες και πεπερασμένες σχέσεις. (Εξάλλου όταν προχωράμε σε άπειρες σχέσεις ή άπειρους γεννήτορες γίνεται ο κακός χαμός. Εκεί οι καταστάσεις ξεπερνούν την φαντασία και σίγουρα την σχεδιαστική δεινότητα του γράφοντα!)

2 ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Ορισμός 1 *Το Cayley γράφημα μιας πεπερασμένα παριστώμενης ομάδας*

$$G =< S, R >$$

είναι ένα επίπεδο γράφημα (1-skeleton) με :

i) σύνολο κορυφών $K(G) = \{g : g \in G\}$

ii) σύνολο ακμών $A(G) = \{(g, gs) : g \in G, s \in S$

Και δύο σχέσεις :

a) $o : A(G) \to K(G)$ *με* $o((g, gs)) = g$ *και*

b) $t : A(G) \to K(G)$ *με* $t((g, gs)) = gs$.

Συμβολίζεται συνήθως με $\Gamma_S(G)$

Παρατήρηση 1 *Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε ακμή* (g, gs) *έχει ώς ετικέτα το* s. *Επίσης μπορούμε να χρωματίσουμε κάθε ακμή* s *με ένα διαφορετικό χρώμα (εξού και coloured diagramm).*

Ορισμός 2 *Το Cayley γράφημα μιας ομάδας γίνεται μετρικός χώρος αν θεωρήσουμε ως μήκος κάθε ακμής το ένα και απόσταση δύο κορυφών* g, h *το ελάχιστο πλήθος γεννητώρων του* S *ώστε* $g = s_1 s_2 s_3 ... s_n g = h$ *δηλαδή :*

$$d(g,h) = min\{n : s_1 s_2 ... s_n g = h s_i \in S\}$$

Παρατήρηση 2 *Η* d *όπως ορίστηκε είναι αριστερά αναλλοίωτη μετρική. Έτσι το Cayley γράφημα γίνεται μετρικός χώρος στο οποίο η* G *δρα με πολλαπλασιασμό από αριστερά που σέβεται τις ισομετρίες.*

Επιτέλους ας κάνουμε ένα διάλειμμα από τους ορισμούς και ας φτιάξουμε ωραία σχήματα, πολύχρωμα και περίεργα!

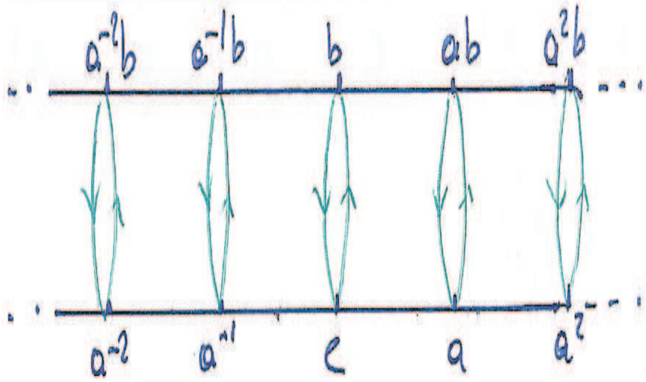

Figure 1: $G =< a, b \,|\, b^2 = e >$

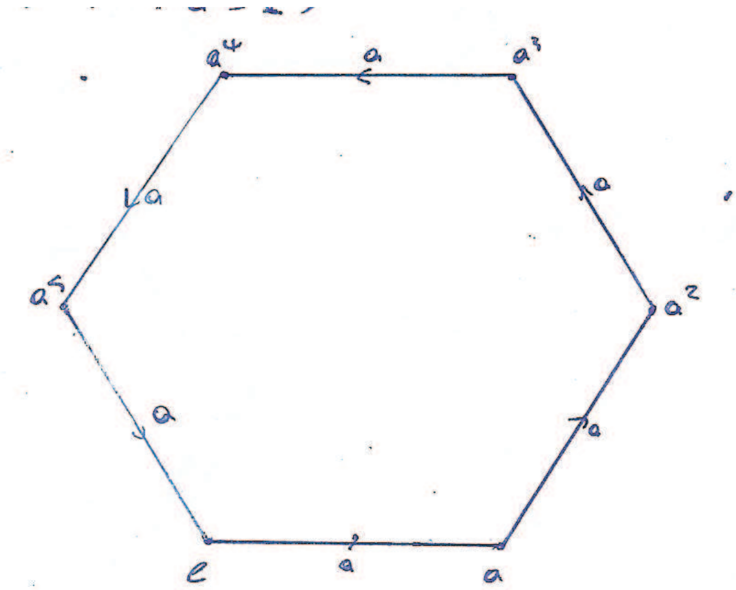

Figure 2: $\mathbb{Z}_6 =< a \,|\, a^6 = e >$

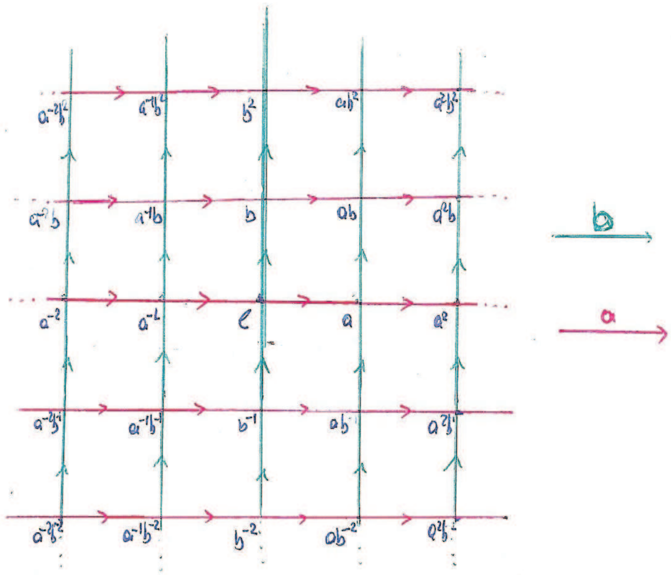

Figure 3: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} =< a, b \,|aba^{-1}b^{-1} = e >$

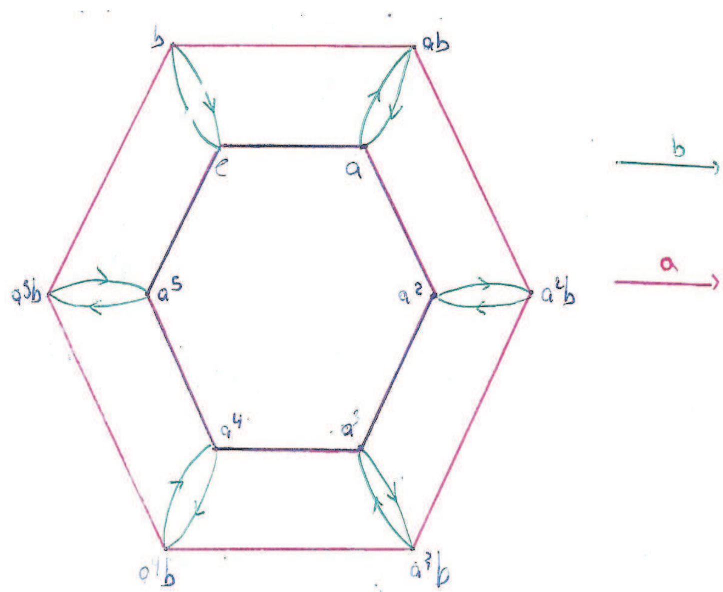

Figure 4: $G = < a, b \,|\, a^6 = b^2 = e >$

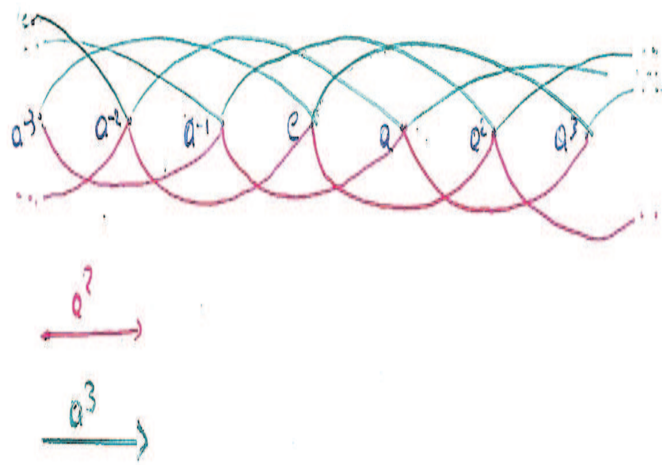

Figure 5: $F_1 =< a^2, a^3 >$

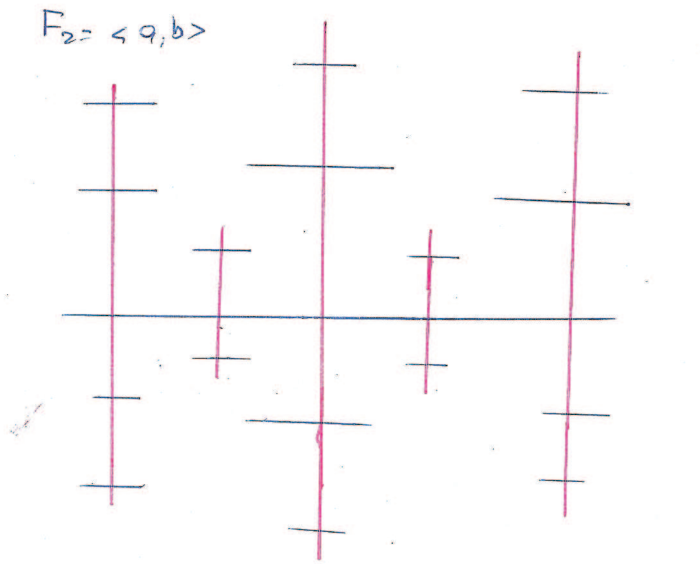

Figure 6: $F_2 =< a, b >$

3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Ξεκινάμε με έναν από τους ορισμούς που εμφανίζονται σε κάθε θεωρία που σέβεται τον εαυτό της. Στα γραφήματα ομάδων δεν έχουν νόημα τόσο οι ισομετρίες γιατί έχουν πολλές απαιτήσεις, ούτε όμως και οι απλά συνεχείς συναρτήσεις γιατί προσφέρουν λίγες πληροφορίες. Η μαγική κουβέντα που ακούγεται εδώ είναι: ”Σχεδόν ισομετρίες!”

Ορισμός 3 *Δύο γραφήματα X, Y λέγονται σχεδόν ισομετρικά (quasi-isometric) αν και μόνο αν υπάρχουν $f : X \to Y$ και c, k σταθερές ώστε :*

i) $\forall y \in Y \exists x \in X$ *με* $d(f(x), y) \leqslant c$

ii) $\forall x, zinX \frac{1}{k} d(x, y) \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$

Το παρακάτω θεώρημα μας εξασφαλίζει οτι το Cayley γράφημα αλλάζει μεν μορφή όταν αλλάξουν οι παραστάσεις της G αλλά όχι με τυχαίο τρόπο. Τουλάχιστον κάποιες από τις πληροφορίες που μας δίνει το γράφημα διατηρούνται.

Λήμμα 1 *Αν $\Gamma_S(G)$ είναι το Cayley γράφημα μιας d_S η μετρική του και g στην G έχουμε ότι $d(h, h * g) \leqslant |g|$.*

Απόδειξη. Έστω $|g| = n$ οπότε $g = s_1 * s_2 * ... * s_n$ όπου s_i είναι γεννήτορες της G. Τότε $h*g = h*s_1*s_2*...*s_n$ που δίνει ότι $d(h, hg) \leqslant d(h, s_1*h)+d(s_1* h, s_2*s_1*h)+...+d(s_1*...*s_{n-1}*h, s_1*...*s_n*h) = 1+1+...+1 = n = |g|$ και έχουμε το λήμμα. ■

Θεώρημα 1 *Αν G πεπερασμένα παριστώμενη ομάδα και $< S_1|R_1 >, < S_2|R_2 >$ δύο αναπαραστάσεις της. Τότε τα Cayley γραφήματα που προκύπτουν είναι σχεδόν ισομετρικά.*

Απόδειξη. Έστω S_1=$\{a_1, a_2, ...a_n\}$ και S_2=$\{b_1, b_2, ...b_k\}$.
Θέτουμε $l = max\{|a_i|_{S_2} : a_i \in S_1\}$ και $m = max\{|b_i|_{S_1} : b_i \in S_2\}$.
Θα δείξουμε ότι $id : \Gamma_{S_1}(G) \to \Gamma_{S_2}(G)$ είναι $l+m$ - σχεδόν ισομετρία ,δηλαδή, $\frac{1}{l+m}$ $d_{S_1}(g_1, g_2) \leqslant d_{S_2}(g_1, g_2) \leqslant (l+m)$ $d_{S_1}(g_1, g_2)$. Η δεύτερη ιδιότητα ελέγχεται εύκολα για κάθε $c > 0$ γιατί για κάθε $g \in \Gamma_{S_2}(G)$ υπάρχει το ίδιο g στην $\Gamma_{S_1}(G)$ ώστε $d(f(g), g) = d(g, g) = 0 < c$.
Έστω g_1 και g_2 δύο στοιχεία της G. Έστω $d(g_1, g_2)_{S_2} = k$ τότε υπάρχουν $b_{i_1}, b_{i_2}, ..., b_{i_k}$ στην S_2 ώστε $g_2 = b_{i_1} * b_{i_2} * ... * b_{i_k} * g_1$. Αυτό σημαίνει ότι

στην $\Gamma_{S_1}(G)$ θα έχουμε $d(g_1, g_2) \leqslant d(g_1, b_{i_1} * g_1) + d(b_{i_1} * g_1, b_{i_2} * b_{i_1} * g_1) + ... + d(b_{i_{k-1}} * ... * b_{i_1} * g_1, g_2)$. Αλλά από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι $d(g_1, b_{i_1} * g_1) \leqslant |b_{i_1}|$, $d(b_{i_1} * g_1, b_{i_2} * b_{i_1} * g_1) \leqslant |b_{i_2}|$, ... , $d(b_{i_{k-1}} * ... * b_{i_1} * g_1, g_2) \leqslant |b_{i_k}|$. Οπότε είναι προφανές ότι $\Gamma_{S_1}(G)$, $d_{S_1}(g_1, g_2) \leqslant |b_{i_1}| + |b_{i_2}| + ... + |b_{i_k}| \leqslant m * k = m * d_{S_2}(g_1, g_2)$ αφού $|b_{i_j}| \leqslant m$ για κάθε $j = 1, 2, .., k$. Όμοια έχουμε ότι $d_{S_2}(g_1, g_2) \leqslant l * d_{S_1}(g_1, g_2)$. Οπότε από τα δύο αυτά έχουμε $d_{S_2}(g_1, g_2) \leqslant (l + m) * d_{S_1}(g_1, g_2)$ and $d_{S_1}(g_1, g_2) \leqslant (l + m) * d_{S_2}(g_1, g_2)$ το οποίο δίνει την ζητούμενη ανισότητα.

■

Και γιατί όμως όλη αυτή η φασαρία ??? Πέρα από τα όμορφα σχήματα τι άλλο. Φυσικά και υπάρχουν πολλά και χρήσιμα αποτελέσματα από αυτήν την θεωρία. Μόνο αναφορές επιτρέπονται σε αυτή την παρουσίαση και μόνο αναφορές θα κάνουμε.

A) Η μελέτη των τοπολογικών ιδιοτήτων που μένουν ανναλλοίωτες κάτω από ισομορφισμούς των Cayley γραφημάτων είναι η βάση της Γεωμετρικής Θεωρίας Ομάδων (Geometric Group Theory). Είναι ειδικό κομμάτι της γενικής θεωρίας γραφημάτων (Spectral graph Theory).

B) Οι ομάδες "όρια", limit groups, μπορούν να οριστούν μέσω των Cayley γραφημάτων τους τα οποία με κάποια συγκεκριμένη τοπολογία αποτελούν όρια των Cayley γραφημάτων των αντίστοιχων ομάδων που μετέχουν στο όριο.

C) Έστω G ομάδα και S σύνολο γεννητόρων αυτής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

i) Το $\Gamma_S(G)$ είναι δέντρο.

ii) Η G είναι ελεύθερη επί του S.

D) Από την δράση της ομάδας στο γράφημα της παίρνουμε ενδιαφέροντα θεωρήματα όπως

Θεώρημα 2 *Μια ομάδα που δρα ελεύθερα χωρίς αναστροφές σε ένα δέντρο X είναι ελεύθερη.*

Το παραπάνω θεώρημα δίνει άμεσα το πολύ χρήσιμο πόρισμα που ακολουθεί, για το οποίο πριν από αυτήν δεν υπήρχε καμμία απλή απόδειξη.

Πόρισμα 1 *Κάθε υποομάδα μιας ελεύθερης ομάδας είναι ελεύθερη.*

Ακόμη έχουμε και το πολύ χρήσιμο συνδυαστικό πόρισμα:

Πόρισμα 2 *Έστω G ομάδα και H υποομάδα αυτής δείκτου n. Τότε αν s_G ο αριθμός των γεννητόρων της G και s_H ο αριθμός των γεννητόρων της H έχουμε την σχέση*

$$s_H - 1 = n(s_G - 1)$$

E) Και ποια η διασύνδεση με τον Riemann ?

Κάθε γράφημα έχει και έναν πίνακα (adjacency matrix) σχετικό με αυτό έστω M. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αυτού του γραφήματος είναι $p_M(t) = det(M - tI)$ (όπως ξέρουμε από το δημοτικό !). Δεδομένου ενός συγκεκριμένου πολυωνύμου δεν είναι γνωστό αν ο σχετικός πίνακας μπορεί να παραχθεί από αυτό. Δύο γραφήματα λέγονται isospectral (εγώ είμαι μαθηματικός όχι μεταφραστής!) αν οι σχετικοί τους πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Τα isospectral γραφήματα δεν είναι αναγκαστικά ισομορφικά, τα ισομορφικά όμως είναι πάντα isospectral, γιατί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο αποτελεί τοπολογική ιδιότητα του γραφήματος.

Ορισμός 4 *Η Ihara ζήτα συνάρτηση ενός γραφήματος είναι : $\zeta_M(t) = \frac{1}{det(I-tM)}$ και αυτή αποτελεί τοπολογική ιδιότητα του γραφήματος.*

Η Ihara ζήτα συνάρτηση ενός Cayley γραφήματος επαληθεύει την υπόθεση Riemann αν και μόνο αν το γράφημα είναι Ramanujan γράφημα. (για οποιαδήποτε ερώτηση σχετική με τα παραπάνω η απάντηση είναι: "δεν ξέρω ,δεν απαντώ!")

F) Τέλος κάποιος θα μπορούσε να θεωρήσει Cayley γραφήματα ομάδων με άπειρους γεννήτορες ή άπειρες σχέσεις.

Τότε η μετρική που ορίσαμε παραπάνω δεν έχει ιδιαίτερο νόημα. Παρόλα αυτά ο συγκεκριμένος τομέας είναι ακόμα ανοικτός και ακόμα γόνιμος.

References

[1] Chung, Fan R. K. (1997) Spectral Graph Theory, Providence, RI: American Mathematical Society. ISBN 0160-7642; no 92

[2] J.P.Serre, *Trees*, Springer - Verlag (1980)

[3] Wikipedia (free online encuclopedia) http://en.wikipedia.org/

[4] R.Lyndon and P.Schupp, *Combinatorial Group Theory*, Springer - Verlag (1970)